

数学科(数学Ⅲ)学習指導案

いろいろな関数の導関数
(高等学校 第3学年)
神奈川県立総合教育センター



【『<高等学校>学習意欲を高める数学・理科 学習指導事例集』平成21年3月】

学習内容や学習活動の工夫や日常生活に関連した話題を取り入れた「抽象的な概念を具体的なアプローチを通して理解させる」指導によって、学習意欲を高めることを主な目的として行った授業実践の学習指導案です。

1 学年 第 3 学年

2 単元名（科目） 「いろいろな関数の導関数」（数学Ⅲ）

3 単元の目標

- ・三角関数、対数関数、指数関数の導関数を求めることができる。
- ・第 n 次導関数の意味を理解し、求めることができる。
- ・放物線、楕円、双曲線などの曲線の方程式を微分することができる。

4 単元の学習計画

- ・三角関数、対数関数、指数関数の導関数 3 時間（本時はその第 2 時）
- ・第 n 次導関数 1 時間
- ・曲線の方程式と導関数 2 時間
- ・補充問題 1 時間

5 単元の評価計画

(1) 評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
<ul style="list-style-type: none"> ・自然対数の底 e（以下、e と呼ぶ。）に関心をもち、その性質を調べようとしている。 ・放物線、楕円、双曲線などの曲線の方程式を微分する方法に関心をもち、意欲的に求めようとしている。 	<ul style="list-style-type: none"> ・正弦関数の導関数を求める過程で、三角関数の極限、及び和を積になおす公式を利用している。 ・対数関数の導関数を求める過程で、e の定義の必要性に気付く。 ・放物線、楕円、双曲線などの曲線の方程式を微分するために、合成関数の微分法が応用できることを考察している。 	<ul style="list-style-type: none"> ・三角関数、対数関数、指数関数の導関数を求めることができる。 ・高次導関数の用語や記号を正しく使用している。 ・放物線、楕円、双曲線などの曲線の方程式を微分することができる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・三角関数、対数関数、指数関数の微分法について理解して、基礎的な知識を身に付けている。 ・放物線、楕円、双曲線などの曲線の方程式を微分する方法を理解している。

(2) 評価計画 ※太枠第 2 時が本時 【 】は評価方法

時	学習内容	評価項目			
		関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
1 ・ 2 ・ 3	<ul style="list-style-type: none"> ・三角関数の導関数 ・対数関数の導関数 ・指数関数の導関数 	<ul style="list-style-type: none"> ・ e に関心をもち、その性質を調べようとしている。 <p>【発問・観察・ワークシート】</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・正弦関数の導関数を求める過程で、三角関数の極限、及び和を積になおす公式を利用している。 <p>【発問・ワークシート】</p> <ul style="list-style-type: none"> ・対数関数の導関数を求める過程で、e の定義の必要性に気付く。 <p>【発問・ワークシート】</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・三角関数、対数関数、指数関数の導関数を求めることができる。 <p>【発問・ワークシート・定期テスト】</p>	

時	学習内容	評価項目			
		関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
4	・第 n 次導関数			・高次導関数の用語や記号を正しく使用している。 【発問・ワークシート・定期テスト】	
5 ・ 6	・曲線の方程式と導関数	・放物線、楕円、双曲線などの曲線の方程式を微分する方法に関心を持ち、意欲的に求めようとしている。 【発問・観察・ワークシート】	・放物線、楕円、双曲線などの曲線の方程式を微分するために、合成関数の微分法が応用できることを考察している。 【発問・ワークシート】	・放物線、楕円、双曲線などの曲線の方程式を微分することができる。 【発問・ワークシート・定期テスト】	
7	・補充問題				・三角関数、対数関数、指数関数の微分法について理解し、基礎的な知識を身に付けている。 【発問・ワークシート・定期テスト】 ・放物線、楕円、双曲線などの曲線の方程式を微分する方法を理解している。 【発問・ワークシート・定期テスト】

(3) 観点別評価について（本時を含む第 1～3 時分のみ）

【関心・意欲・態度】

学習活動における 具体の評価規準	・ e に関心を持ち、その性質を調べようとしている。
「十分満足できる」状況（A） と判断する具体的状況例	・ e に関心を持ち、意欲的にその性質を調べ、自分なりの考えをまとめようとしている。
「努力を要する」状況（C） と評価した生徒への手だて	・ 表計算ソフトを使って、e の定義式における極限值が収束することを再度説明する。

【数学的な見方や考え方】

学習活動における 具体の評価規準	・ 正弦関数の導関数を求める過程で、三角関数の極限、及び和を積になおす公式を利用している。 ・ 対数関数の導関数を求める過程で、e の定義の必要性に気付く。
「十分満足できる」状況（A） と判断する具体的状況例	・ 正弦関数の導関数の公式を用いて、余弦関数や正接関数の導関数を求めている。 ・ 対数関数の導関数を求める過程で、e を定義する必要性を論理的に説明している。
「努力を要する」状況（C） と評価した生徒への手だて	・ 三角関数の極限、及び和を積になおす公式を確認しながら、正弦関数の導関数を求める過程における式変形のポイントを再度説明する。 ・ e を定義する必要性を再度説明して、e の定義式の極限值が存在することを電卓や表計算ソフトを用いて気付かせる。

【表現・処理】

学習活動における 具体の評価規準	・ 三角関数、対数関数、指数関数の導関数を求めることができる。
「十分満足できる」状況（A） と判断する具体的状況例	・ 三角関数、対数関数、指数関数などを用いた合成関数の導関数を求めることができる。
「努力を要する」状況（C） と評価した生徒への手だて	・ 三角関数、対数関数、指数関数の導関数の公式を再度確認する。

【知識・理解】

<評価項目なし>

6 本時の展開

(1) 本時の目標

- ・対数関数の導関数の求め方を理解する。
- ・ e の性質について、様々な学習活動を通して理解を深める。

(2) 本時の指導過程

過程	学習活動	指導内容	指導上の留意点	評価規準 (評価方法)
導入 (10分)	・本時で学習する e について、興味・関心をもつ。	・オイラーの公式を紹介して、 e という数の神秘性や数学的な美しさを感じ取らせる。		
展開 (35分)	<ul style="list-style-type: none"> ・対数関数の導関数を求める過程を考察する。 ・極限值として e を定義する必要性を理解する。 ・生活に密着した話題として預金や借入金の利子計算と e との関連を調べる。 ・二項定理を用いた展開式を利用して、e の近似値を調べる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・導関数の定義に従って対数関数の導関数を求める過程を説明する。 ・e を定義する必要性を認識させ、e の定義式の極限值が存在することを電卓や表計算ソフトを用いて実感させる。 ・利息の繰り入れ期間をどんどん細かくして1年後の元利合計を計算させる。 ・実際に幾つかの部分和を計算し、e の近似値を求めさせる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・極限の性質や対数の性質を利用した式変形を理解させる。 ・最初は、電卓を利用して実際に計算させてみるが、その方法では限界があるので、表計算ソフトを利用して計算した結果を提示する。 ・複利計算に e が現れることを理解させ、数学の実用性を認識させる。 ・二項定理を用いて、e の近似値を電卓で計算することによって、e の値を実感させる。 	<p>【数学的な見方や考え方】</p> <ul style="list-style-type: none"> ・対数関数の導関数を求める過程で、e の定義の必要性に気付く。 (発問・ワークシート) 【関心・意欲・態度】 ・e に関心を持ち、その性質を調べようとしている。 (発問・観察・ワークシート)
まとめ (5分)	・ e の定義と対数関数の導関数の公式を確認する。	・対数関数の導関数の公式を、底が e 以外の場合には、底の変換公式を使って理解させる。	・底の変換公式を復習させる。	

<参考>

「複利計算の問題」

仮に利率 100%、1 年間に n 回利息の付く $\frac{1}{n}$ 年複利で 1 万円の借金をした。 n の値を大きくしていくと、利息込みで 1 年後の借金はどれくらい大きくなるかを求めなさい。

- (1) 利率 100%、1 年間に 1 回利息の付く 1 年複利で 1 万円の借金をした。利息込みで 1 年後の借金の額を求めなさい。

$$10,000 \times (1 + 1) = 20,000 \text{ (円)}$$

- (2) 利率 100%、1 年間に 2 回利息の付く $\frac{1}{2}$ 年 (6 ヶ月) 複利で 1 万円の借金をした。利息込みで 1 年後の借金の額を求めなさい。

$$10,000 \times \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 22,500 \text{ (円)}$$

- (3) 利率 100%、1 年間に 4 回利息の付く $\frac{1}{4}$ 年 (3 ヶ月) 複利で 1 万円の借金をした。利息込みで 1 年後の借金の額を求めなさい。

$$10,000 \times \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 24,414 \text{ (円)}$$

- (4) 利率 100%、1 年間に n 回利息の付く $\frac{1}{n}$ 年複利で 1 万円の借金をした。利息込みで 1 年後の借金の額を求めなさい。また、この n を限りなく大きくしていくと、どうなるか。

$$10,000 \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ (円)}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき、この値は、 $10,000 \times e = 27,183 \text{ (円)}$ に近づく。

二項定理を使って、 e の近似値を計算する。

e の定義式 $e = \lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}$ において、 n を自然数とし、 $k = \frac{1}{n}$ の場合を考えると、

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

となる。ここで、 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ を二項定理で展開して計算すると、

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= {}_n C_0 + {}_n C_1 \left(\frac{1}{n}\right) + {}_n C_2 \left(\frac{1}{n}\right)^2 + {}_n C_3 \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + {}_n C_n \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

となる。この最後の展開式において、 n を十分大きい自然数と考えると、各項までの和を順次近似計算していくと、

第2項までの和は、 $1 + 1 = 2$

第3項までの和は、 $1 + 1 + \frac{1}{2!} = 2.5$

第4項までの和は、 $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2.666 \cdots$

第5項までの和は、 $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 2.708 \cdots$

第6項までの和は、 $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2.716 \cdots$

第7項までの和は、 $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2.718 \cdots$

となり、 e の値に近づくことが確認できる。