数学科（数学Ⅱ）学習指導案

正接の加法定理

（高等学校　第２学年）

神奈川県立総合教育センター

【『＜高等学校＞学習意欲を高める数学・理科　学習指導事例集』平成 21 年３月】

　生徒が興味をもちやすい学習内容を選び、学習活動を工夫した「数学的なパズルや数学的に美しい等式の証明を通して、知的好奇心を喚起する」指導によって、学習意欲を高めることを主な目的として行った授業実践の学習指導案です。

１　学年　　　　　　　第２学年

２　単元名（科目）　　「正接の加法定理」（数学Ⅱ）

３　単元の目標
・三角関数の重要な性質である加法定理を理解し、具体的な事象に活用する方法を知る。
・正接の加法定理を利用して、75°、15°などの正接の値を求めたり、平面上の２直線のなす角を求めたりすることができる。

４　単元の学習計画
・正接の加法定理　　　　　　　　１時間
・正接の加法定理の利用　　　　　１時間（本時）
・２直線のなす角などの問題演習　１時間

５　単元の評価計画
（１）評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
・正接の加法定理に関心をもち、加法定理を使って計算できる正接の値を求めようとしている。	・正接の加法定理を利用して、平面上の２直線のなす角を求める方法を適切に考察している。	・正接の加法定理を用いて、いろいろな正接の値を求めることができる。	・正接の加法定理について理解して、基礎的な知識を身に付けている。

（２）評価計画　※太枠が本時　　【　】は評価方法

時	学習内容	評価項目			
		関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
1	・正接の加法定理				・正接の加法定理について理解して、基礎的な知識を身に付けている。【発問・ワークシート・定期テスト】
2	・正接の加法定理の利用	・正接の加法定理に関心をもち、加法定理を使って計算できる正接の値を求めようとしている。【発問・観察・ワークシート】		・正接の加法定理を用いて、いろいろな正接の値を求めることができる。【発問・ワークシート・定期テスト】	

3	・２直線のなす角などの問題演習		・正接の加法定理を利用して、平面上の２直線のなす角を求める方法を適切に考察している。 【発問・ワークシート・定期テスト】		・正接の加法定理について理解して、基礎的な知識を身に付けている。 【発問・ワークシート・定期テスト】

（３）観点別評価について（本時、第２時分のみ）

【関心・意欲・態度】

学習活動における具体の評価規準	・正接の加法定理に関心をもち、加法定理を使って計算できる正接の値を求めようとしている。
「十分満足できる」状況（A）と判断する具体的状況例	・正接の加法定理を使って計算できる三角形の三つの角度の組合せを何通りも考えようとしている。
「努力を要する」状況（C）と評価した生徒への手だて	・数学的なひらめきを必要とするパズルが、加法定理を使えば簡単に解けることを説明し、加法定理に関心をもたせる。

【数学的な見方や考え方】

＜評価項目なし＞

【表現・処理】

学習活動における具体の評価規準	・正接の加法定理を用いて、いろいろな正接の値を求めることができる。
「十分満足できる」状況（A）と判断する具体的状況例	・$\tan 15^\circ$ を求める際に、$\tan(45^\circ - 30^\circ)$、$\tan(60^\circ - 45^\circ)$ など複数の方法があることに気付き、計算がより簡単な方法で処理することができる。
「努力を要する」状況（C）と評価した生徒への手だて	・$75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$、$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ と変形し、加法定理を使うように助言する。

【知識・理解】

＜評価項目なし＞

６　本時の展開

（１）本時の目標

・正接の加法定理を利用して、75° や 15° などの正接の値を求めることができる。

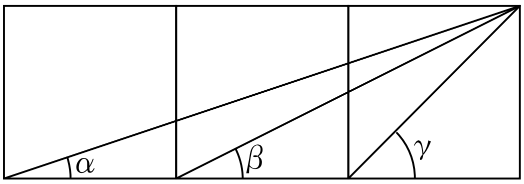
（２）本時の指導過程

過程	学習活動	指導内容	指導上の留意点	評価規準 （評価方法）
導入 （10分）	・正接の加法定理を復習する。 ・「パズル問題」を解く。	・前時に学習した正接の加法定理を復習する。 ・導入問題として、「パズルの問題」を考えさせる。	・ヒントを与えて、図形的な解き方により解かせる。 ・数学的なひらめきを必要とするパズルが、加法定理を使えば簡単に解けることを説明する。	
展開 （35分）	・正接の加法定理を利用する教科書の問題を解く。 ・正接の加法定理を利用して、75°や15°などの正接の値を求める。 ・三角形の三つの角度の正接の値の関係を調べる。 ・幾つかのパターンを自分で考えて、成り立つ等式を予想する。 ・予想した等式を証明する。	・正接の加法定理を利用する方法を確認する。 ・加法定理を用いると、30°・45°・60°を足したり、引いたりしてできる角度の三角関数の値を求めることができることを確認する。 ・加法定理を用いると、等式が証明できることを説明する。	・パズルと同じ内容の問題であることを気付かせる。 ・分母の有理化について復習する。 ・適宜、机間指導を行い、生徒がつまずいている点に助言を行う。 ・加法定理を使って計算できるような三角形の三つの角度の組合せを生徒自らが考えることにより、加法定理の理解を深め、使い方の習熟を目指す。	【表現・処理】 ・正接の加法定理を用いて、いろいろな正接の値を求めることができる。 （発問・ワークシート・定期テスト） 【関心・意欲・態度】 ・正接の加法定理に関心をもち、加法定理を使って計算できる正接の値を求めようとしている。 （発問・観察・ワークシート）
まとめ （５分）	・本時の学習内容を振り返りシートに記入する。	・本時の学習内容をまとめる。 ・振り返りシートとワークシートを回収する。	・様々な問題に加法定理が利用できることを確認して、加法定理の有用性を理解させる。	

＜参考＞

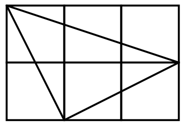
「パズル問題」

合同な３つの正方形を図のように並べて書きます。図に書き込んだα、β、γはそれぞれの角の大きさを表します。α、β、γの関係を求めなさい。



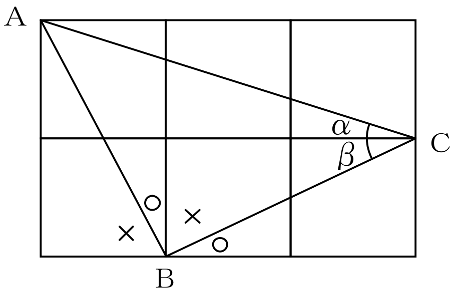
生徒へのヒント

★右図のような四角形と三角形の図を与える。



★図形の中に、α・β・γの角を探すように指示する。

（解答１）図形を用いた解法



左図において、△ＡＢＣは直角二等辺三角形だから

$\alpha+\beta=45^\circ$

一方、$\gamma=45^\circ$

よって、$\underline{\alpha+\beta=\gamma}$

（解答２）加法定理を用いた解法

「パズル問題」の図において、$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$、$\tan\beta=\dfrac{1}{2}$、$\tan\gamma=1$　である。

ここで、正接の加法定理により、

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}}=1$$

よって、$\tan(\alpha+\beta)=\tan\gamma=1$

$\alpha+\beta$、γ　はともに鋭角なので、$\alpha+\beta=\gamma$　である。

「三角形の三つの角度の正接の値の関係」

［問］　三角形における三つの正接の値の関係を調べなさい。

（学習内容）

(1)　三角比の表を使わずに加法定理を使って、正接の値を計算できるような三つの三角形の内角の組合せを考えてみよう。

（例）　「すべて 60°（正三角形）」

「45°・ 60°・ 75°の組合せ」

(2)　(1)で考えた三角形について、三つの内角の正接の値を計算してみよう。

(3)　この３つの内角の正接の値の間に成り立つ関係式を予想してみよう。

（ヒント）三つの値を足したり、掛けたりしてみよう。

(4)　(3)で予想した関係式を証明してみよう。

△ＡＢＣにおいて、次の等式が成り立つことを証明しなさい。

tanＡ＋tanＢ＋tanＣ＝tanＡ・tanＢ・tanＣ

どんな三角形でも、
この三つの数の和と
積の値が一致する！

（証明）

三角形の内角の和は 180°なので、Ａ＋Ｂ＋Ｃ＝180°

従って、Ｃ＝180°－（Ａ＋Ｂ）

これより、

$$\tan C = \tan(180° - (A+B))$$

$$= -\tan(A+B) \qquad \rightarrow \tan(180° - \theta) = -\tan\theta \text{ を利用}$$

$$= -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} \qquad \rightarrow \text{正接の加法定理を利用}$$

両辺に（１－tanＡ・tanＢ）をかけて、分母を払うと、

$$\tan C(1 - \tan A \cdot \tan B) = -(\tan A + \tan B)$$

両辺を展開して整理すると、

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

となる。