神奈川県立総合教育センター長期研究員研究報告 7:25〜30. 2009

「数学的な考え方」をはぐくむ授業づくりを目指して

── 作図と類推で導入する「軌跡」の授業展開 ──

榎　本　一　哉[1]

学習指導要領改訂の柱に掲げられている「理数教育の充実」や「思考力等の育成」を図るには、「数学的な考え方」についての認識をより深めることが大切であると考えた。そこで「数学的な考え方」そのものについて調べ、さらに思考力のはぐくみにつながると思われる授業の在り方について考察を行った。それをもとに教材・教具・指導等の工夫をし、検証授業を通してその成果を確認した。

はじめに

「平成17年度高等学校教育課程実施状況調査」の生徒質問紙調査結果(国立教育政策研究所2007）で「数学を勉強すれば，私は，論理的に考えることができるようになる」に対する肯定的回答の割合が30.1%、「論理的に考えることができるよう，数学を勉強したい」に対する肯定的回答の割合が25.2%にとどまっていた。

「平成19年度神奈川県立高等学校学習状況調査報告書」（神奈川県教育委員会2008）では、評価の観点別にみた問題ごとの通過率で、「数学的な見方や考え方」が36.7%と四観点中、最も低い通過率であった。

また、「教育課程部会におけるこれまでの審議のまとめ」（文部科学省2007）で、教育内容に関する主な改善事項の中に「理数教育の充実」（p.５）があり、学習指導要領改訂のポイントの中に「思考力・判断力・表現力等の育成」（p.３）が挙げられている。そこで、「数学的な考え方」をテーマとして本研究に取り組んだ。

研究の内容

１　数学的な考え方の把握

(1)高等学校学習指導要領解説の記述

高等学校学習指導要領解説数学編理数編（文部省 1979）に、「だれもが納得する前提から，正しい推論によって次々と命題を導き，その結果として結論に到達する，というような」、「論理的かつ体系的な」考え方が数学的な考え方であるという旨の説明がある。

数学科の目標で平成元年の高等学校学習指導要領より「数学的な見方や考え方」という表現に変わっているが、その高等学校学習指導要領解説数学編理数編（文部省 1989）において「従前の目標の中では，(中略)体系的に組み立てていく思考過程の中に，見方も含めて考えていた」とあり、見方と考え方を並記し重要性を強調するとともに、一層幅広くとらえることにより、数学の学習のあらゆる場面を通して身に付けることをねらいとしたと説明されている。

(2)「数学的な考え方」の具体的内容

どのような「考え方」がどのような場面で使われるかを具体的に改めて挙げてみることは「数学的な考え方」への認識を深める上で意味がある。教える側の「数学的な考え方」に対する具体的な理解が高まれば、生徒のつまずきの原因が分かり、発問場面や解説場面の質的な改善につながることが期待できる。

ここでは、片桐重男氏の「数学的な考え方の具体化と指導」(2004)（小学校での指導を主としたものだが、具体的な「考え方」が多く示されている。）を引用し、内容について具体的に考察してみた。

数学の内容に関係した数学的な考え方

①考察の対象の集まりや，それに入らないものを明確にしたり，その集まりに入るかどうかの条件を明確にする（集合の考え）
②構成要素（単位）の大きさや関係に着目する（単位の考え）
③表現の基本原理に基づいて考えようとする（表現の考え）
④ものや操作の意味を明らかにしたり，広げたり，それに基づいて考えようとする（操作の考え）
⑤操作の方法を形式化しようとする（アルゴリズムの考え）
⑥ものや操作の方法を大づかみにとらえたり，その結果を用いようとする（概括的把握の考え）
⑦基本法則や性質に着目する（基本的性質の考え）
⑧何を決めれば何が決まるかということに着目したり，変数間の対応のルールを見付けたり，用いたりしようとする（関数の考え）
⑨事柄や関係を式に表したり，式をよもうとする（式についての考え）

数学の方法に関係した数学的な考え方

①帰納的な考え方
②類推的な考え方
③演繹的な考え方
④統合的な考え方（拡張的な考え方を含む）

---

１ 神奈川県立岸根高等学校
研究分野（数学）

⑤発展的な考え方
⑥抽象化の考え方（抽象化，具体化，条件の明確化の考え方）
⑦単純化の考え方
⑧一般化の考え方　　　⑩記号化の考え方
⑨特殊化の考え方　　　⑪数量化，図形化の考え方

「数学的な考え方の具体化と指導」（片桐 2004）より
（通し番号について標記上の変更を加えた。）

「数学の方法に関係した数学的な考え方」について、上記枠内では考え方の項目だけ列記しているので、私なりの解釈で、高校数学の授業において使われる場面の例をいくつか挙げてみる。

①「帰納的な考え方」は、「数列の第１，２，３・・項から一般項を推測する」等、個々の具体から一般を推測していく考え方である。

②「類推的な考え方」は、「例題を参考にして問題に同様の解法を用いようとする」等、既知の事柄で成り立つことがそれと似た事柄でも成り立つと考えていく考え方である。

③「演繹的な考え方」は、既知の事柄から必然的な結論を導き出す、数学の問題解決場面での軸となる考え方で、証明や解法の論理展開で用いる。

④「統合的な考え方」、⑤「発展的な考え方」、⑧「一般化の考え方」は内容の線引きがやや難しい。「方程式の解を図形の共有点の座標ととらえ、方程式や不等式をグラフで考えていく」「指数を自然数の範囲から整数、有理数の範囲へと拡張していく」「ある結論や性質が得られたとき、条件が変わっても成り立つか考えてみる」等、共通点を見いだしてまとめたり、性質の適用範囲を広げる考え方である。

⑥「抽象化の考え方」は、「問題を解くのに不要な内容や条件があれば捨象する」等、身近な事象を数学的な問題としてとらえる場合には欠かせない考え方である。

⑦「単純化の考え方」は、「読み取りやすい数字に置き換えて考えてみる」や「立体を真上や真横から見た平面図で考えてみる」等である。

⑨「特殊化の考え方」は、「定義域の両端や中央の値など特別な場合で考えて、全体の見通しを立てていく」「不等式の表す領域を考えたとき、求めた領域内の幾つかの点を用いて不等式を満たすかチェックしてみる」等である。

⑩「記号化の考え方」は文字や演算記号、用語を用いて簡潔に表現し思考をしやすくする考え方である。

⑪「数量化」の例は「『平行』を『傾きが等しい』と、とらえる」「『音の大きさ』を○デシベル、と表す」等で、質的なものを数や量を用いて表すことである。「図形化」の例は、場合の数での“樹形図”、集合の“ベン図”、関数の“グラフ”等がある。

上述のように(1)高等学校学習指導要領解説は「思考活動全体」の視点で、(2)片桐の分類は「数学の内容や数学の方法」に着目して、「数学的な考え方」をとらえている。この(1)、(2)両面から「数学的な考え方」をはぐくむ授業づくりを目指し、本研究を進めた。そこで「数学的な考え方」のはぐくみのために、生徒に伝えるべき「数学的な考え方」のよさを次のようにとらえた。

・集合の考え、関数の考え、式についての考え、抽象化、単純化、数量化、図形化、等の考え方を主に用いて「問題をより明確にとらえられること」
・概括的把握の考え、特殊化、帰納的、類推的、記号化、演繹的、等の考え方を主に用いて「見通しを持って、論理的かつ簡潔に表現・処理できること」
・統合的、発展的、一般化、等の考え方を主に用いて「利用範囲や視野を広げていけること」

２　「数学的な考え方」をはぐくむための指導上意識すること

前述の「数学的な考え方のよさ」を伝えるために、本研究では、「指導上意識すること」として、次の(1)、(2)に重点を置いた。

(1) 目的や理由を明確にすること

思考を進める上で、まず対象となる問題が「分かる」ことが必要である。そのためには、その条件や目的を明らかにしていくことが大切である。その過程で抽象化や式についての考え方等のよさも強調される。

さらに、解法手順にも理由や必然性を見いださせることで、ただの暗記ではなく、論理的な思考となる。生徒自身にそのような思考をたどらせることは「数学的な考え方」のはぐくみにつながると考える。

(2)「一般的・統合的に」の意識を持つこと

生徒の中には「答えを出すことが最終目的」と考える者もいる。しかし「視野を広げ、事象を多面的にとらえたり、より良いものを求める」姿勢をはぐくむ上で、別解や他の単元内容との関連を考えたり、条件が変わっても通用するような、より一般的なものを求めることは大切である。

また「定理・公式を使って具体的問題を解決する“一般から特殊へ”」の場面では形式的な処理が多くなる。形式的な処理により思考労力を軽減できるという「よさ」もあるが、さらに“特殊から一般へ”の場面を取り入れることで思考や考察の幅が広がる。

３　検証授業

第２学年２クラス（77 名）を対象に、数学Ⅱの「軌跡」で検証授業を行った。

検証授業では、前項で挙げた「指導上意識すること」に加え、高等学校学習指導要領解説数学編理数編（文部科学省 1999）の単元内容の記述を踏まえ、次の三点に着目して効果の検証を行った。

Ⅰ　具体例を利用した、目的の明確化と実感を伴った理解の促進。
Ⅱ　他単元との関連解説や“特殊から一般へ”の場面の組込。
Ⅲ　複数解法の提示による式利用の有用性の強調。

【準備と工夫】（上記Ⅰ～Ⅲとの関連をカッコで付す。）

(ⅰ)問題の精選と追加（Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ）

検証授業計４回の授業内のプリントでは次の問題を扱い、教科書の他の記載問題は授業外演習用とし解答を配る。

問題(1)　点Ａ（１，２）からの距離が３である点Ｐの軌跡
問題(2)　２点Ａ（５，２）、Ｂ（１，４）から等距離にある点Ｐの軌跡
問題(3)　２点Ａ（０，０）、Ｂ（３，０）からの距離の比が２：１である点Ｐの軌跡
問題(4-1)　点Ｑが円$x^2+y^2=4$上を動くとき、点Ａ（４，０）と点Ｑを結ぶ線分ＡＱの中点Ｐの軌跡
問題(4-2)　点Ｑが円$x^2+y^2=4$上を動くとき、点Ａ（６，０）と点Ｑを結ぶ線分ＡＱの中点Ｐの軌跡
〔チャレンジ問題〕点Ｑをx軸方向に３、y軸方向に１だけ平行移動した点をＰとするとき、
①点Ｑが放物線$y=x^2$上を動くときの点Ｐの軌跡
②点Ｑが円$x^2+y^2=4$上を動くときの点Ｐの軌跡

問題(1)は「円の定義」といえるもので、この問題を用いて、「条件を満たす点の集まりとしての図形」という認識を生徒に持たせる。

問題(2)と問題(3)は、初等幾何の証明との比較をすることで、結果の見通しが立たない中でも結論を導ける「式を用いた解法」の有用性を感じさせる。また、ＡＰ：ＢＰの比を条件とした２題であるが、問題(2)は直線、問題(3)は円、と得られる軌跡が異なる。問題(2)と問題(3)の関係をより深く掘り下げることで、統合的・発展的な見方をはぐくむことができる。

問題(4-1)の類題として、教科書にない問題(4-2)を追加した。問題(4-2)は、問題(4-1)から少しだけ条件を変えたもので、条件が変わると結果にどう影響するか、に目を向けさせることで“特殊から一般へ”の思考を生徒に意識付ける。また、相似の説明も用いて、軌跡が円とならない問題への一般化に触れさせる。

同じく追加したチャレンジ問題①②では、問題(4-1)と問題(4-2)に似た立式や計算の演習と、「２次関数のグラフの平行移動」や「円の方程式」の単元との関連解説をし、統合的な理解をさせる。

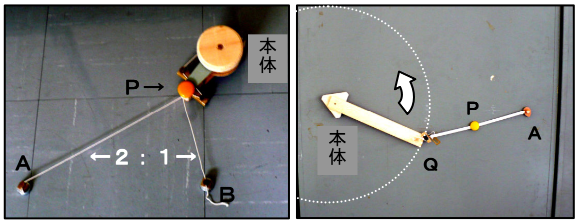
(ⅱ)作図による導入（Ⅰ、Ⅲ）

過去に「軌跡」そのものの理解や図のイメージができない生徒がいた。そこで、作図による導入を行うことにした。

初めから「条件を式化し、その結果として軌跡をとらえる」という解析幾何的な解法の順で指導するよりも、具体的な問題で作図に取り組ませることで、軌跡の問題の目的を、より実感を持って把握させることができると考えた。さらに作図から結果を予想しにくい問題(3)や問題(4-1)を通して、式を用いた解法の有用性を実感させる。

(ⅲ)教具の開発（Ⅰ、Ⅱ）

作図で軌跡の結果が予想しにくい問題(3)と問題(4-1)には、教具を準備し、条件を満たしながら動く「実物」を見せて説明する（第１図）。このような問題では、板書やパソコンのグラフィック動画を使うよりも生徒が実感を伴った理解をし、問題の考察もしやすくなると考えた。



第１図　教具の写真１，２

写真１は問題(3)用の教具で、ＡＰ：ＢＰ＝２：１の条件に合わせ、本体内部の巻き取り軸の半径を２：１の２種類にし、磁石で固定した２定点Ａ，Ｂから伸ばしたタコ糸の長さが２：１を保って巻き取られるようにした。

写真２は問題(4-1)用の教具で、点Ａを磁石で固定し、線分ＡＱ部分をゴムにして中央に点Ｐの印を付けることにより、点Ｑが移動して線分ＡＱの長さが変わっても、点Ｐが常に線分ＡＱの中点の位置となるようにした。また、本体の一部を中心として固定し、アーム部を動径のように回転させることで、点Ｑの円状の動きをスムーズに見せることができる。ＡＱ間のゴムの長さや点Ｐの印の位置を変えることで、問題(4-2)を含め、異なる条件でも利用できる。相似との関連説明で、円以外の図形を条件として考えさせる際は、教具本体からゴムだけを取り外して使用する。

(ⅳ)「類推」を重視した授業展開（Ⅰ、Ⅱ）

今回は、高等学校学習指導要領解説数学編理数編（文部科学省 1999）で、数学的活動の内的活動として直観、帰納、演繹と並んで挙げられている「類推」を特に重視した。片桐による分類の「数学の方法に関係した数学的な考え方」にも挙げられており、「自分の経験をいかす」という意味で、日常生活でも重要な考え方である。

「軌跡」の解析的解法では、立式や計算処理の難しさが、「必要十分性の確認」と「図形の見いだし」という軌跡の問題に共通する「目的」をとらえにくくさせている。そこで、「必要十分性の確認」について作図を通

して理解させる（ⅱ）の工夫に加え、プリントは「穴埋め式」を中心にして計算処理の負担を軽減する。

さらに各問題の解答欄の枠取り構成をそろえ、プリントの取組を通して「条件や立式が異なっても、同じ『軌跡』の問題である」と、生徒自身に実感させる。上記のプリントの工夫や解説を通して、易しい問題からの「類推」を強調することで、立式や計算が複雑になっても、「軌跡」の問題に共通する目的を生徒がしっかりと意識して問題に向かえるようになる。その結果、解法手順の暗記でない、目的意識を持った問題への取組を引き出し、論理的な思考をはぐくむことができると考えた。

問題(4-1)と問題(4-2) を利用した一般化の場面でも、発問を通して類推的に考えさせ、そのよさを実感させるなど、すべての時限を通じて、「類推」を意識した発問や解説を心がける。

【検証授業の概要と様子】

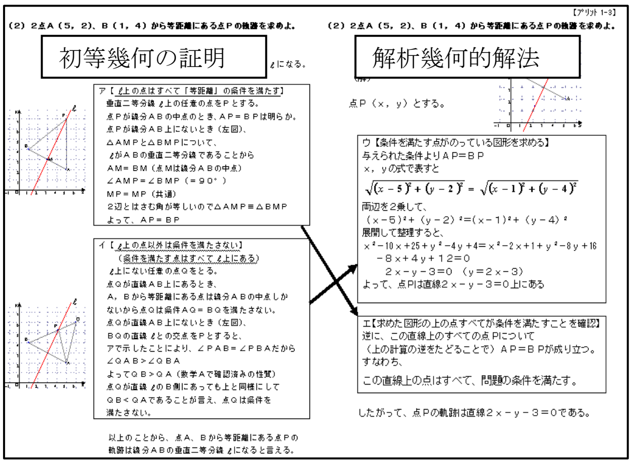
１限目：問題(1)～(4-1)までの作図と結果の確認、問題(2) を用いた必要十分性の説明

作図が容易な円となる問題(1) で「軌跡」の定義を確認させた後、席の近い４～５名のグループに分け、軌跡が直線や円となる問題(2)～(4-1)の作図をさせた。生徒同士の教え合いから、過去の学習の振り返りをさせ、結果の予測が引き出せるよう意識して、机間指導をした。問題(2) では、ＡＰ＝ＢＰから線分ＡＢの中点しか見出せない生徒がいるため、ＡＰ：ＢＰ＝１：１＝２：２＝３：３のように連比で示し、距離は指定されていないことを認識させ、条件の「式化」の有用性を生徒に理解させた。また、問題(2)を黒板の左側、問題(3)を右側に板書し、問題(3)の条件の式化「ＡＰ：ＢＰ＝２：１＝４：２＝６：３」を、問題(2)の式から生徒に類推的に考えさせた。

黒板での図の説明にはタコ糸を使い、問題(1)では、円を作図する際もフリーハンドでなく、中心から距離が一定ということが意識されるように描いた。問題(2)では、ＡＰ＝ＢＰの条件を満たす点Ｐの説明でも、「線分ＡＰにあてたタコ糸をそのまま移動して線分ＢＰに重ねる」といった、同じ長さを視覚的にも実感するような工夫をした。

問題(3)と問題(4-1)については、黒板での作図説明後、さらに教具を使った説明を行った。実際にとった幾つかの点を教具が通っていく様子を見て、実感を持って理解が進んだようで、生徒から感嘆の声が上がった。授業後に教具を見に来る生徒もおり、関心の高まりが感じられた。

問題(2) の解説では、実際の作図の過程を追いながら、「必要十分性の説明がなぜいるのか」を考えさせた。またプリントでは、初等幾何の証明と解析幾何的解法を対比させて見られるように工夫した（第２図）。初等幾何の証明から、軌跡が「線分ＡＢの垂直二等分線になる」ことを強調し、次の回で解析幾何的な解法で得られる式から読み取れる「傾き」と関連させ、「直線の方程式」の単元内容にもつなげた。


【ﾌﾟﾘﾝﾄ 1-3】

(2) 2点Ａ (5, 2)、Ｂ (1, 4) から等距離にある点Ｐの軌跡を求めよ。

初等幾何の証明

ℓになる。

ア【ℓ上の点はすべて「等距離」の条件を満たす】
垂直二等分線 ℓ上の任意の点をＰとする。
点Ｐが線分ＡＢの中点のとき、ＡＰ＝ＢＰは明らか。
点Ｐが線分ＡＢ上にないとき（左図）、
△ＡＭＰと△ＢＭＰについて、
ℓがＡＢの垂直二等分線であることから
ＡＭ＝ＢＭ（点Ｍは線分ＡＢの中点）
∠ＡＭＰ＝∠ＢＭＰ（＝９０°）
ＭＰ＝ＭＰ（共通）
２辺とはさむ角が等しいので△ＡＭＰ≡△ＢＭＰ
よって、ＡＰ＝ＢＰ

イ【ℓ上の点以外は条件を満たさない】
（条件を満たす点はすべてℓ上にある）
ℓ上にない任意の点Ｑをとる。
点Ｑが直線ＡＢ上にあるとき、
Ａ，Ｂから等距離にある点は線分ＡＢの中点しかないから点Ｑは条件ＡＱ＝ＢＱを満たさない。
点Ｑが直線ＡＢ上にないとき（左図）、
ＢＱの直線ℓとの交点をＰとすると、
アで示したことにより、∠ＰＡＢ＝∠ＰＢＡだから
∠ＱＡＢ＞∠ＱＢＡ
よってＱＢ＞ＱＡ（数学Ａで確認済みの性質）
点Ｑが直線ℓのＢ側にあっても上と同様にして
ＱＢ＜ＱＡであることが言え、点Ｑは条件を満たさない。

以上のことから、点Ａ、Ｂから等距離にある点Ｐの軌跡は線分ＡＢの垂直二等分線ℓになると言える。

(2) 2点Ａ (5, 2)、Ｂ (1, 4) から等距離にある点Ｐの軌跡を求めよ。

解析幾何的解法

点Ｐ（ｘ，ｙ）とする。

ウ【条件を満たす点がのっている図形を求める】
与えられた条件よりＡＰ＝ＢＰ
ｘ，ｙの式で表すと
$$\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}$$
両辺を２乗して、
$(x-5)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y-4)^2$
展開して整理すると、
$x^2-10x+25+y^2-4y+4=x^2-2x+1+y^2-8y+16$
$-8x+4y+12=0$
$2x-y-3=0 \quad (y=2x-3)$
よって、点Ｐは直線$2x-y-3=0$上にある

エ【求めた図形の上の点すべてが条件を満たすことを確認】
逆に、この直線上のすべての点Ｐについて
（上の計算の逆をたどることで）ＡＰ＝ＢＰが成り立つ。
すなわち、
この直線上の点はすべて、問題の条件を満たす。

したがって、点Ｐの軌跡は直線$2x-y-3=0$である。

第２図　問題(2)のプリント（解答入り）

２限目：問題(2)の解析幾何的な解法説明と必要十分性の確認、問題(3)の演習及び解説

１限目は作図によるイメージづくりと、初等幾何の視点からの「必要十分性の確認」を中心に展開し、２限目から、この単元の主目標である解析幾何的解法の説明に入った。

問題(2) の解説では前回との関連を踏まえ、式の上からの「必要十分性の確認」として「条件を表す式⇔図形を表す式」という点を強調した。今回の検証授業では目的や理由の明確化を重視した。例えば「まずＰ（ｘ，ｙ）と置く」といった手順提示的な与え方ではなく、「条件を式で処理したい」→「点Ｐの座標を（ｘ，ｙ）と置く」のように目的と手段の関係を丁寧に説明した。さらに掲示物にする等の方法で「考え方のポイント」や「方針」を強調し、生徒自身が目的意識の上でその手段を用いるよう指導した。

問題(3)の解説では、生徒が平方完成でつまずかないように「式が表す図形の読み取りのために、円の方程式の標準形への変形をする」といった「理由」を強調した。問題(2) 同様の解説の流れを心がけ、問題に対する「類推」の意識を持たせた。

今回、触れられなかった内容に、「問題(3) の条件からさらに距離の比を２：1.5、２：1.8、２：1.9、２：２と変えていった結果を類推させる」ということがあった。比が２：２の場合は問題(2)の場合の条件ＡＰ＝ＢＰと同じになり、軌跡が円から直線に変わる。このような取組で、問題(2)と問題(3)は異なった軌跡でも関連があることに気付かせ「一般的・統合的に」考えることの興味を引き出すことができる。また、一般にｍ≠ｎのとき２点Ａ，Ｂからの距離の比がｍ：ｎである点Ｐの軌跡が円となり「アポロニウスの円」と呼ばれる。上のことから「ｍ＝ｎだと直線になってしまうため、ｍ≠ｎの条件が必要となる」という理由も

より明確にできる。

３限目：問題(4-1）の解説と問題(4-2）の演習及び、相似を用いた解説

問題(4-1）以降は条件に動点を持つ問題で、扱う文字の種類も増えるため、プリントを穴埋め式にして生徒の抵抗感を無くす工夫をした。解説でも、問題(2)と問題(3)で強調した、必要十分性の説明と、点Ｐ（ｘ，ｙ）の満たす関係式を求めるという「目的」を説明の中心とし、既習問題からの「類推」を意識付けた。

問題(4-2)は、作図はせずに軌跡がどうなるか予想をさせた。初めて目にする問題であったが問題(4-1)の類題という意識を持たせたことで、結果が円になることはすぐに予想できた。位置や大きさまで見通せない生徒はいたが、予想後に演習させたことで、やるべきことがしっかり意識できていたように感じた。また、自分の予想結果と合っていたとき、達成感の高まりが見てとれた。事後のアンケートでも、「予測を立ててから考えて解いていくのでやりやすかった」等、「類推」や「見通しを持つ」ことに肯定的な感想が多かった。

その後、教具を使って線分や三角形での動きも見せた上で、相似を用いた説明をした。その際、「点Ｐが線分ＡＱの中点である」という条件を「ＡＱ：ＡＰ＝２：１」と式化してとらえることで、「点Ｑが動く図形の 1/2縮尺の図形を点Ｐが描く」という一般的な形での理解をさせた。式化することの有用性とともに、「個々の問題では見えにくい性質が、一般的な視点からとらえることで理解しやすくなる」ことを生徒に感じさせた。

また、「軌跡の円を小さくするには条件をどう変えるとよいか」といった、結果から条件を考えさせる発問をし、理解の定着を確認した。

４限目：チャレンジ問題の演習及び他単元との関連を含めた解説

問題(4-1)問題(4-2)と同様の解法練習と、他単元との関連説明のため、チャレンジ問題を用意した。教科書にない問題だが、問題①を穴埋め式にしたこともあり、流れを追いながら問題①に、さらに、多くの生徒が問題①を参考に記述式の問題②にも取り組んでおり、類推的に考えようとする姿勢が見てとれた。

問題①の解説では、２次関数の標準形の式から「ｘ軸方向の平行移動は符号を逆に、ｙ軸方向の平行移動はそのままの符号で」といった機械的な読み取り暗記とならないよう、その理由を軌跡の式変形を通して再確認させた。また問題②の解説では、中心からの距離が半径と等しい、という「距離の公式」を基にしていた「円の方程式」と同じ式が、原点を中心とする円を「平行移動する」という考え方でも導かれることを見せ、「統合的な考え方」や別の視点から物事を見ることに対する興味を引き出すよう指導した。

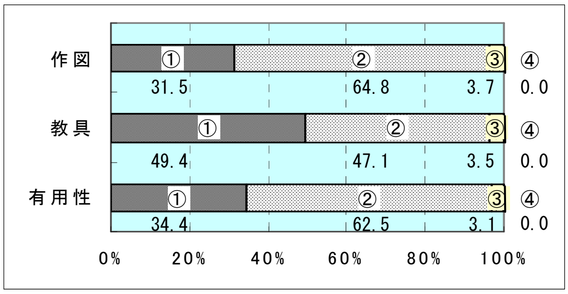
４ アンケート結果と考察

作図、教具ともに理解に役立ったとする生徒が多く、具体的体験や視覚的な訴え等で実感を伴わせることが理解する上で効果があることが確認できた（第３図）。

作図ができなくても、それに続く教具を用いた説明で納得でき、作図内容の理解も進んだと考えられる。

また、工夫の意図通り、作図を通して予測の難しさを体験させたことが、初等幾何の説明と合わせて、式を用いる有用性の実感につながったと思われる。

◎「作図」による理解
◎「教具を用いた説明」による理解
◎「式を利用する解法の有用性」の実感

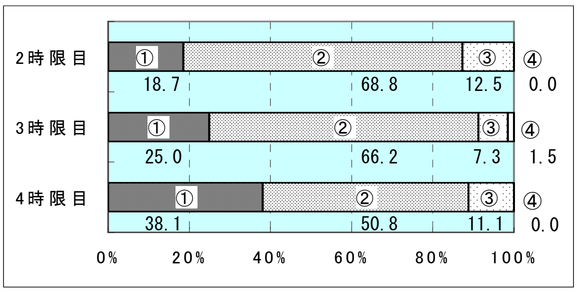


①とても役立った　②役立った
③役立たなかった　④まったく役立たなかった

第３図　アンケート集計結果１

「類推的な考え方」に関する質問の一つは２～４限目共通の質問項目として調査した（第４図）。肯定的回答全体の割合は約９割で、３回の結果を通して大きな違いはないが、①「よくできた」の割合が回を追うごとに増加した。授業内での工夫と合わせ、アンケートの質問項目として繰り返し触れさせたことも継続的な意識付けとして効果があったと思われる。

式を利用する解法で「与えられた条件が変わっても手順は変わらない」ことを意識して解けましたか。



①よくできた　②だいたいできた
③あまりできなかった　④まったくできなかった

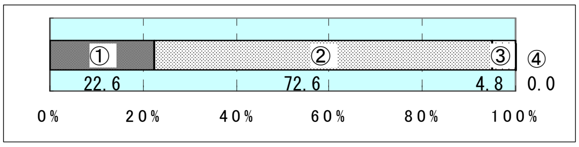
第４図　アンケート集計結果２

「『似たような問題を同じように扱えないか』を意識して解くようにしたいと感じましたか」という質問では「今までも感じていたがさらに感じた」が約23%、「今までは感じていなかったがこれからしたいと感じた」が約72%と、類推的に考えようとする姿勢がはぐ

くめたと判断できる結果を得た（第５図）。

肯定的な回答が 95％に達しており、「平成 17 年度高等学校教育課程実施状況調査」生徒質問紙調査結果（国立教育政策研究所 2007）の「数学の問題を解くとき，前に解いた問題と似ているところや違っているところがどこかなどを考えるようにしていますか」の肯定的回答 64％と比較しても十分なものであると言える。

「似たような問題に対して同じように扱えないか」を意識して解くようにしたいと感じましたか。



①今まで感じていたがさらに感じた
②今まで感じていなかったがこれからしたいと感じた
③今まで感じていたが今回は特に感じなかった
④今までも感じていなかったしこれからもしたいとは感じなかった

第５図　アンケート集計結果３

アンケートの自由記述に「普段、図形は覚えるだけでしたが、覚えている事がこうだからこうなる、という理解につながりました」という、単なる暗記でなく論理的な展開に価値を見いだすものが、生徒の自発的な感想として挙がっていたことは収穫であった。

また、「やるべき問題があると家でもやれるので、復習するようになった」という記述もあった。普段も宿題は課されているが、理解が進み生徒自身が取り組むべき課題を自覚することで、授業時間外の自主的学習にもつながったと考えることができる。

今回特に計画・意図はしていなかったが、作図や演習のときは、実質的に、本来の教科担当者との二人体制になった。「二人の先生のおかげですんなり理解できました」「一人ひとり見て回ってくれて、とても分かりやすかったです」という感想もあり、個別指導やティームティーチングも指導効果をさらに高める手段と考えることができる。

５ 研究のまとめ

検証授業を通して、次の枠内の実践は生徒の理解度の向上や、「数学的な考え方」のよさの認識やはぐくみに効果があることが確認できた。

Ⅰ 具体例を利用した、目的の明確化と実感を伴った理解の促進。
Ⅱ 他単元との関連解説や“特殊から一般へ”の場面の組込。
Ⅲ 複数解法の提示による式利用の有用性の強調。

また、今回行った工夫は、作業的な要素の取り入れや問題配列、プリント作成、解説時の配慮等、「軌跡」以外の単元でも取り入れられるものがあると思う。

アンケートの質問項目の集計結果では７～９割の肯定的評価を得て、数値上、工夫の実効性は確認できた。

一方で、さらに詳しく見ると、アンケートの自由記述の中には、授業の説明について「細かくやってくれて、よかった」という感想もあれば、「説明が長い」というものもあった。また、プリント利用や穴埋め式についても賛否両方の感想があった。生徒全員を満足させることの難しさを改めて感じている。

生徒の学ぶ意欲の低迷が課題とされる現在、「分かると数学も楽しくなったから、苦手に感じなくてよかった」「やっぱり理解できると楽しいんだなと思った」という感想からも、「分かる授業」を目指す「数学的な考え方をはぐくむ授業」づくりが必要とされていると言える。

おわりに

今回、軌跡の分野で「数学的な考え方」をテーマに、問題の精選や発問の工夫、教具の開発に取り組み検証授業を試みた。この授業づくりを通して、指導者の授業観や学習観の大切さを改めて実感した。

数学学習の系統性を視野に、引き続き「数学的な考え方」をはぐくむ授業の実践に取り組み、「理数教育の充実」を図りたい。

引用文献

文部省　1979　『高等学校学習指導要領解説数学編理数編』　実教出版　p. 14

文部省　1989　『高等学校学習指導要領解説数学編理数編』　ぎょうせい　p. 16

文部科学省　2007　「教育課程部会におけるこれまでの審議のまとめ」　p. 3、p. 5

片桐重男　2004　『数学的な考え方の具体化と指導』　明治図書　pp. 38-39

参考文献

文部科学省　1999　『高等学校学習指導要領解説数学編理数編』（平成 17 年一部補訂）　実教出版

国立教育政策研究所　2007　「平成 17 年度教育課程実施状況調査（高等学校）ペーパーテスト調査集計結果及び生徒質問紙調査集計結果」

神奈川県教育委員会　2008　「平成 19 年度神奈川県立高等学校学習状況調査報告書」

日本数学教育会編　1969　『数学的考えとその指導　高校編』　明治図書

川口廷・中島健三　編著　1968　『数学的な考え方と新しい算数』　東洋館出版社

中原忠男編集　2000　『算数・数学科　重要用語 300 の基礎知識』　明治図書