

基礎学力の定着を図るコンピュータを利用した指導法

— 三角比における教材の開発 —

本田 晶 紀¹

数学 I の三角比では、鋭角の三角比の意味は理解できても、鈍角の三角比の意味が理解できずに、その後の学習が困難になる生徒もいると思われる。そこで、最初から単位円を用いて、鋭角・鈍角の区別無く $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) を定義するよう導入を工夫し、それぞれの取り得る値の変化の様子を視覚的にとらえることができるコンピュータ教材を開発し、理解の深まる指導法の改善を図った。

はじめに

国立教育政策研究所の「平成17年度高等学校教育課程実施状況調査 教科・科目別分析と改善点（数学・数学 I）」（2007）には、調査結果のポイント、調査結果の特色及び指導上の改善点が記されている。

調査結果のポイントでは、三角比を扱う「図形と計量」について、「出題した11問すべての通過率が設定通過率を下回ると考えられ、11問中9問は無解答率が20%を超えている」と分析されている。

調査結果の特色では、「三角比については、まずその記号の意味を理解させ定着させることが重要であるが、三角比の記号の意味を理解しても鈍角の三角比の意味が理解できず、その後の学習が困難になる生徒もいると思われる」と指摘されている。

指導上の改善点では、「生徒の主体的活動に基づく授業への転換を図ることが重要である」と指摘されている。その具体的な方策の一つとして、「コンピュータやグラフ表示が可能な電卓などのテクノロジーを活用した学習指導の工夫」が挙げられており、「コンピュータの動的操作性やシミュレーション性を積極的に活用することによって、生徒自らが数学的な関係や性質を探究するような主体的な学習の促進が期待できる」と指摘されている。

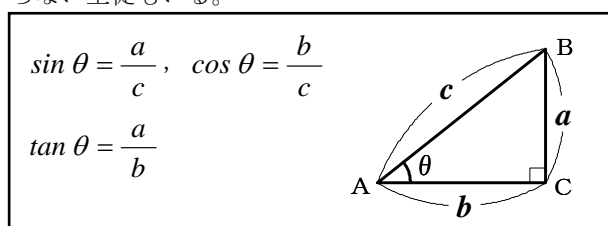
神奈川県教育委員会の「平成18年度神奈川県立高等学校学習状況調査報告書」（2007）では、三角比に関する指導上の改善点として、「当初は直角三角形の辺の長さの比で定義されるが、後に半径 r または半径 1 の円を用いて、座標で定義されることになる。そういったことを見通して、新しい定義を導入する際に生徒にハードルの高さを感じさせないような指導の工夫が必要である」と指摘されている。

そこで、三角比の分野において、コンピュータを利用して、理解の深まる指導法の改善を図った。

研究の内容

1 所属校での現状

数学 I の三角比では、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の定義は、鋭角の三角比の定義（第1図）から $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲に拡張された三角比の定義（第2図）へと変化する。所属校では鈍角の三角比の学習において、 θ が 90° 以上になることや、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値が負になることに対して、違和感を持つ生徒がおり、中には理解が深まらない生徒もいる。

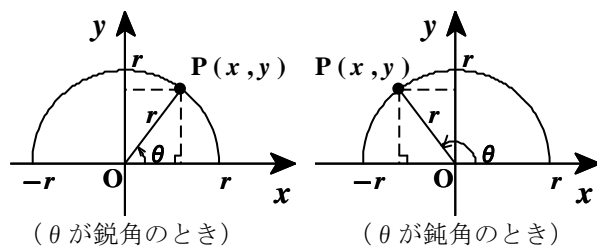


第1図 鋭角の三角比の定義

原点 O を中心とする半径 r の円において、 x 軸の正の向きから左まわりに角 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) をとったときの半径を OP とし、点 P の座標を (x, y) とするとき、次のように定める。

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

これらの値は、半径 r によらず、 θ のみで定まる。



第2図 拡張された三角比の定義

2 二つの取組

生徒が鈍角への拡張による違和感を持たずに $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の意味の理解を深めるためには、次の二つの取組を行うことが効果的であろうと考えた。

1 県立厚木西高等学校
研修分野（算数・数学）

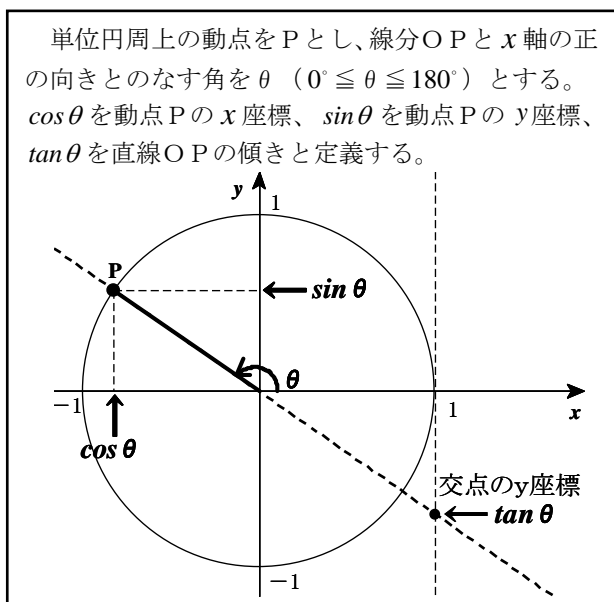
(1) 単位円による定義を用いて導入する取組

取組の一つは、三角比の単元の最初から単位円による定義(第3図)を用いて、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 、 $\tan\theta$ を導入する取組である。

単位円による定義では、角の大きさが鋭角に限定されないため、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 、 $\tan\theta$ を導入することが可能である。角の範囲を鋭角に限定し、三角形の相似を利用して鋭角の三角比の定義(第1図)の式を導くこともできる。

また、単位円による定義では、 $\cos\theta$ を動点Pのx座標、 $\sin\theta$ を動点Pのy座標、 $\tan\theta$ を直線OPの傾きと定義している。x座標、y座標、傾きは、図形上で示すことが容易であり、視覚的に確認ができる。

単位円による定義を用いた導入は、特に新しい導入ではない。教科書では、例えば、実教出版から出版された昭和54年度用の文部省検定済教科書「新編数学I」で、一般角、弧度法に続いて $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ を単位円を用いて定義している。現行の学習指導要領の数学Iの範囲には、一般角も弧度法も含まれていないが、十分に活用できる効果的な指導法であると考えた。



第3図 単位円による定義

(2) 変化の様子を視覚的にとらえさせる取組

もう一つの取組は、コンピュータ教材を用いて、 θ の変化に対応した $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 、 $\tan\theta$ の変化の様子を視覚的にとらえさせる取組である。

コンピュータを用いると、画面上に表示させたグラフや図形を、短時間に正確に変化させることができる。また、グラフや図形の変化を途中で停止させたり、停止させたグラフや図形を再び動かしたりする動的操作を行うことも可能である。

3 コンピュータ教材の開発と概要

これら二つの取組を踏まえ、次の特徴(第1表)を

持つコンピュータ教材を開発した。

第1表 開発したコンピュータ教材の特徴

- | |
|-------------------------------------|
| 特徴1：三角比の学習の最初から単位円を用いて導入している。 |
| 特徴2：提示される画面の順に学習を展開できる。 |
| 特徴3：グラフや図形の変化の様子を視覚的にとらえることができる。 |
| 特徴4：グラフや図形を動かしたり停止させたりする動的操作が可能である。 |
| 特徴5：操作が簡単である。 |
| 特徴6：学校に導入されているコンピュータ上で動作する。 |

(1) 開発の前提

コンピュータ教材の開発にあたっては、授業はコンピュータ教室で行い、生徒一人が一台のコンピュータを使用することを前提とした。個々の理解に応じて学習を進めることができ、動的操作(第1表の特徴4)をより積極的に行うことができると考えた。

(2) 開発環境

コンピュータ教材の開発に用いたコンピュータは、神奈川県立総合教育センターのコンピュータである。開発には、コスト面を考え、OS付属のソフトウェアやフリーウェアを最大限活用した。

(3) ファイル形式

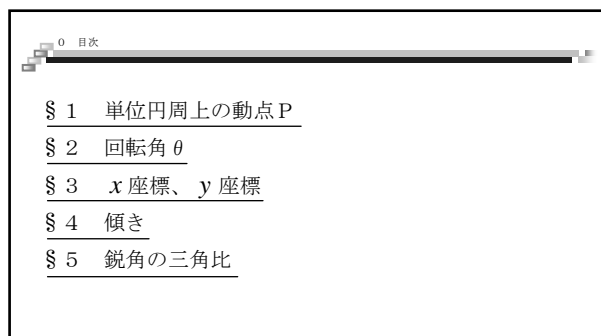
操作を簡単にする(第1表の特徴5)ための工夫として、コンピュータ教材のファイル形式をHTML形式とした。HTML形式はWebページで使われている形式で、基本的な操作がマウスをクリックするだけで行うことができ、生徒にとって扱いやすい形式である。

HTML形式のファイルは、Webブラウザ(インターネット閲覧ソフト)を用いて使用できる。Webブラウザは、一般にすべてのパソコンにインストールされているので、今回開発したコンピュータ教材を、授業で使用することが可能である(第1表の特徴6)。

HTML化には、ホームページ作成ソフトを用いた。

(4) 構成

開発したコンピュータ教材では、始めに、目次画面(第4図)が表示される。



第4図 目次画面

学習したいセクションをマウスでクリックすることにより、画面はそのセクションに切り替わる。その後、生徒は画面の指示に従って学習を進められる。

画面切替には、ハイパーリンクを用いた。

(5) 画面

各画面には、主に左側に文字による説明を表示させ、それに対応して右側にグラフや図形を配置した。

コンピュータ教材が提示する順に学習を進めれば、単位円による導入から三角比の学習を展開できるように（第1表の特徴1、特徴2）、学習の順序に従って画面が適切に切り替わるよう工夫した。

さらに、どの画面からも目次画面に戻れるよう、各画面の左上部に目次へのハイパーリンクを設置した。

作成した画面の総数は109画面である。

(6) GIFアニメーション

コンピュータの画面上でグラフや図形を動かし、視覚的にとらえさせる（第1表の特徴3）アニメーションを作成した。

複数の紙に少しずつ動きが変化する絵を描き、紙をパラパラとめくりながら絵を見ると、残像現象により絵が連続的に動いているように見える。この原理を用いたアニメーションがGIFアニメーションで、Webページで広く利用されている。

例えば、単位円周上を動点が1周するGIFアニメーションを作る過程で、回転角を 1° ずつ変化させた場合は、 $\theta = 0^\circ$ の静止画、 $\theta = 1^\circ$ の静止画、同様に θ が 360° になるまでの合計361枚の静止画が必要となる。そして、これらを連続して表示することにより、動点が単位円周上を1周しているように見える。

作成過程は次の通りである。まず、グラフ表示ソフトを利用して、正確な静止画を作成する。次に、その静止画の一部を少しだけ変化させ、次の静止画をつくる。さらにその一部を少しだけ変化させ、その次の静止画をつくる。この操作を繰り返して、すべての静止画を完成させる。最後に、これらの静止画をアニメーション作成ソフトを利用してアニメーション化する。これで1本のGIFアニメーションが完成する。

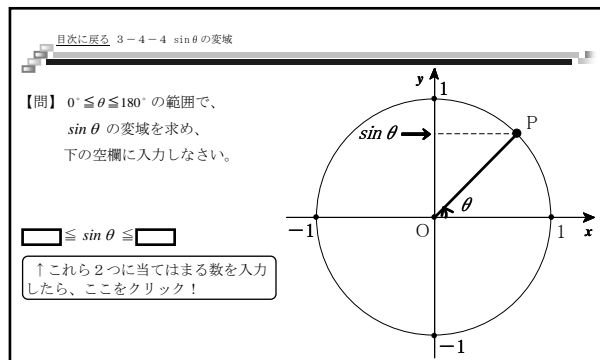
これらの手順で、合計約7700枚の静止画を作成した。これを基に50本のGIFアニメーションを作成し、109画面の適所に表示させた。

画面上のGIFアニメーションは、画面が表示されると自動的に動き出す。一通りの動きが終わると自動的に停止し、数秒後に再び自動的に最初から動き始める。次の画面に切り替えるまでは、何度もこの動きを繰り返す。キーボードのESCキーを押すことで、途中で動きを停止させることができ、F5キーを押すことで最初から動かすことができる（第1表の特徴4）ので、生徒は納得するまで繰り返し確認することができる。

(7) 理解に応じた画面切替

生徒の理解を深めるために、理解に応じた画面切替

を取り入れた。画面切替には、画面の空欄にキーボードから数値を入力する形式のもの（第5図）と、複数の選択肢の中からマウスで一つをクリックする形式のものがある。



第5図 空欄に数値を入力する形式の画面

画面は、生徒が入力した値やクリックした選択肢に応じて別の画面に切り替わる。生徒は切り替わった画面で説明を読み、表示されたGIFアニメーションや静止画を見ることで、理解を深めることができる。

数値入力形式の切替は、簡易プログラミング言語のJavaScriptを用いて作成した。JavaScriptを利用した理由は、主要なWebブラウザでサポートされ、多くのWebページで利用されているからである。

4 検証授業

所属校の数学Iでは、第1学年の2クラスを、発展1クラス、標準2クラスに分割して、習熟度別授業を実施している。検証授業は、標準クラスの生徒27人を対象に、三角比の導入3時間をコンピュータ教室で行った。

所属校のコンピュータ教室は、机と机の間隔が狭く、机間指導がしにくい状況であるため、生徒の状況を把握し個別に支援を行えるよう、生徒の座席の位置に十分に配慮した。また、コンピュータ教室のすべてのパソコンで、開発したコンピュータ教材が使用できるように事前に準備した。一斉授業ではあるが、生徒一人が一台のパソコンを扱うこととし、コンピュータ教材が提示する画面の順序に従って授業を進めた。

教室前方にスクリーンを設置し、必要に応じて説明を加えた。また、ワークシートを配付し、ポイントや解答を書かせることによって学習内容の定着を図った。

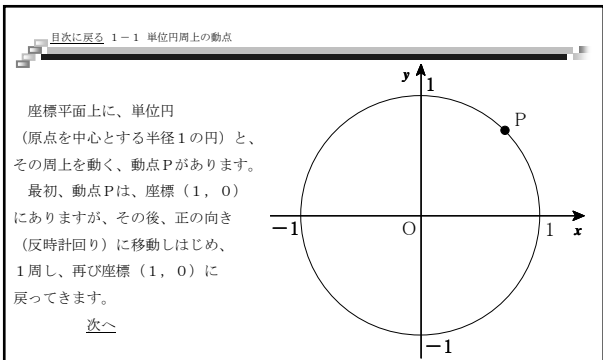
(1) 第1時検証授業

第1時検証授業は、単位円周上の動点Pの移動に伴う、 x 座標、 y 座標、直線OPの傾きの変化の様子と変域について理解させる授業である。

まず、実生活に結び付いた実例として、実測せずに、川の対岸までの距離や木の高さを求める方法を教科書の説明や例題を使って示した。三角比を学ぶことにより、中学校の相似で扱っていた問題を、三角比を利用

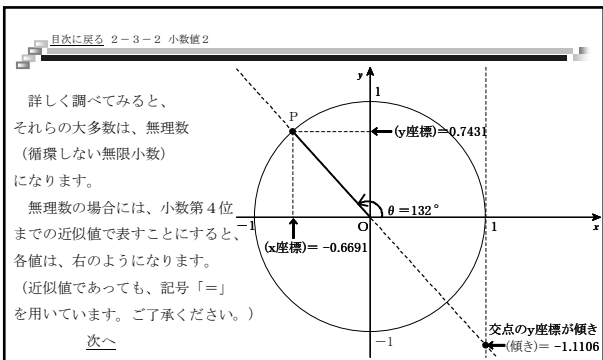
して解くことができることを説明した。

次に、コンピュータ教材の提示する画面の順序に従って、単位円と単位円周上の動点Pの動きについての説明を行った(第6図)。



第6図 単位円についての説明の画面

その後、単位円周上の動点Pのx座標、y座標、直線OPの傾きの変化の様子と変域に関して説明し、理解した内容をワークシートに記入させた。次に、単位円周上の動点Pのx座標、y座標、直線OPの傾きが、回転角 θ の一つの値に対応して、それぞれ一つ決定することを説明した。さらに、単位円周上の動点Pのx座標、y座標、直線OPの傾きの値を小数で示し、その変化の様子を確認させた(第7図)。



第7図 x座標、y座標、傾きの値を示した画面

生徒はGIFアニメーションの動きに関心を示し、その動きを止めたり、再び動かしたりしながら、x座標、y座標、直線OPの傾きの変化の様子を観察し、積極的にワークシートに記入していた。また、変域の理解を深める過程で、理解に応じた画面切替を経験し、周囲の友人と互いに教え合い、感動しながら学習を進めていた。

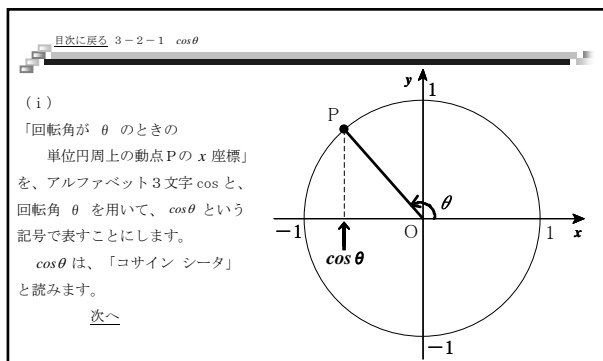
(2) 第2時検証授業

第2時検証授業は、 $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の定義、それらの値の変化の様子や変域について理解させる授業である。

コンピュータ教材が提示する画面の順序に従って、まず、数学Iの範囲では θ の変域を $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とすることを示し、 θ が 180° を超える場合については数学IIで学習することを説明した。

次に、単位円を用いて $\cos\theta$ を定義した(第8図)。具体例として、 $\cos 90^\circ$ 、 $\cos 0^\circ$ の値を示し、練習問題として $\cos 180^\circ$ の値を考えさせた。さらに、 θ が 0° から 180° まで変化するときの $\cos\theta$ の値を小数で表示し、変化の様子を観察させた。

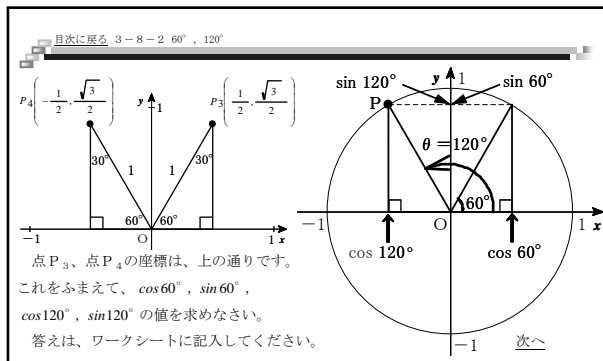
続いて、同様に単位円を用いて $\sin\theta$ を定義した。具体例として、 $\sin 180^\circ$ 、 $\sin 0^\circ$ の値を示し、練習問題として、 $\sin 90^\circ$ の値を考えさせた。さらに、 θ が 0° から 180° まで変化するときの $\sin\theta$ の値を小数で表示し、変化の様子を観察させた。



第8図 $\cos\theta$ の定義の画面

次に、単位円周上の動点Pの座標が $(\cos\theta, \sin\theta)$ と表せることを確認させた。続いて、 θ の値を 1° ずつ変化させたときの動点Pの座標を小数で示し、観察させた。その後、練習問題として、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ における $\cos\theta$ 、 $\sin\theta$ の変域を考えさせ、増減の様子を表にまとめさせた。

次に、二種類の三角定規の辺の比と角の大きさについて復習させた。これらの辺の比と三角形の相似を利用して、 θ が 30° または 150° のとき、 θ が 60° または 120° のとき(第9図)、 θ が 45° または 135° のときに分けて、それぞれ、 $\cos\theta$ 、 $\sin\theta$ の値を求めさせた。そして、 $\cos\theta$ と $\cos(180^\circ - \theta)$ の関係と、 $\sin\theta$ と $\sin(180^\circ - \theta)$ の關係に気付かせた。最後に、それらの値を表にまとめ、理解を深めさせた。



第9図 $\cos 60^\circ$ 、 $\sin 60^\circ$ 、 $\cos 120^\circ$ 、 $\sin 120^\circ$ の値を求めさせる画面

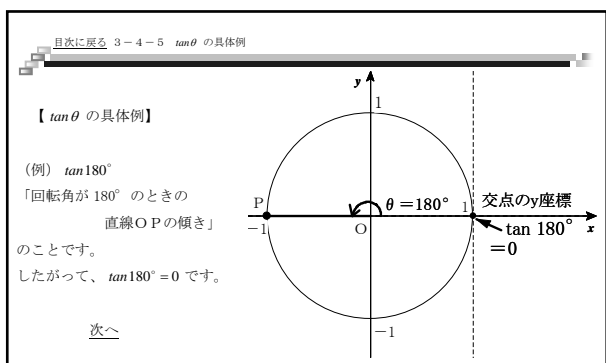
生徒は画面上のGIFアニメーションを見ながら、主体

的に三角形の辺の長さを計算し、頂点の座標を求め、ワークシートに $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ の値を記入していた。また、必要に応じて前の画面に戻ったり、早く先の画面へ進んで次の練習問題にチャレンジしようとする様子も見られた。

(3) 第3時検証授業

第3時検証授業は、 $\tan \theta$ の定義、 $\tan \theta$ の変化の様子や変域について理解させ、単位円による $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の定義から、教科書の鋭角の三角比の定義（第1図）の式を導かせる授業である。

まず、コンピュータ教材の提示する画面の順序に従って、単位円を用いて $\tan \theta$ を定義した。次に具体例として $\tan 180^\circ$ の値を示し（第10図）、練習問題として、直線 $y = x$ を利用して $\tan 45^\circ$ の値を考えさせ、続いて $\tan 135^\circ$ の値を考えさせた。さらに三角定規を利用して、 $\tan 30^\circ$ 、 $\tan 150^\circ$ 、 $\tan 60^\circ$ 、 $\tan 120^\circ$ の値について説明した。その後、 θ が 0° から 180° まで変化するときの $\tan \theta$ の値を小数で表示し、変化の様子を観察させた。続いて、 $\tan \theta$ の変域を考えさせ、増減の様子を表にまとめ、理解を深めさせた。



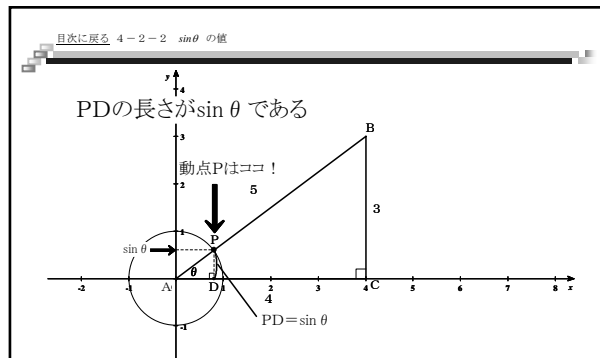
第10図 $\tan 180^\circ$ の値を示した画面

次に、二種類の三角定規とは相似でない直角三角形の1つの鋭角 θ を用いて、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を考えさせた。まず、 $AB = 5$ 、 $BC = 3$ 、 $CA = 4$ 、 $\angle BAC = \theta$ の直角三角形 BAC に着目させ、 $\cos \theta$ の値を考えさせた。頂点 A が原点 $(0, 0)$ に、頂点 B が点 $(4, 3)$ に、点 C が点 $(4, 0)$ に位置するように $\triangle BAC$ を座標平面上に配置し、三角形の相似を利用して $\cos \theta$ の値を導くGIFアニメーションを観察させた。次に、 $\sin \theta$ の値を考えさせ、 $\sin \theta$ の値を導くGIFアニメーションを観察させた（第11図）。

さらに、 $\tan \theta$ の値を示し、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ のそれぞれの値が、直角三角形の二つの辺の長さを用いた分数の形で表されることを示した。

最後に、直角三角形 ABC の辺の長さを、 $AB = c$ 、 $BC = a$ 、 $CA = b$ として一般化したときの $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を求めさせ、求め方の過程を表示したGIFアニメーションを観察させた。そして、それらの値が、教科書の鋭角の三角比の定義（第1図）の式と

同じ式であることを気付かせた。さらに、 θ が 30° 、 45° 、 60° のときの $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を、鋭角の三角比の定義の式を用いて計算させ、単位円を用いて求めた値と比較させた。



第11図 $\sin \theta$ の値を導く画面

生徒は、鋭角の三角比の定義の式が導かれるGIFアニメーションを繰り返し観察し、教科書の内容と見比べていた。ワークシートにまとめる時間を設定したため、学習内容がしっかり整理できていた。また、発展的な内容に関心を持ち、 θ が 180° よりも大きい $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を求めている生徒の姿も見られた。

5 検証授業の成果と課題

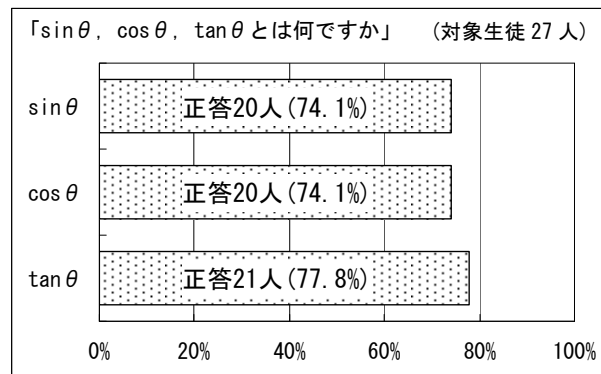
3時間の検証授業後に、授業を受けた生徒27人を対象に、小テストと検証授業に関するアンケートを実施した。

(1) $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の意味の理解

第12図は、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の定義の確認を行った記述式小テストの正答率を示したものである。

「 $\sin \theta$ とは何ですか。言葉で説明しなさい」の正答率は74.1%であった。同様に「 $\cos \theta$ とは何ですか。言葉で説明しなさい」という問の正答率は74.1%、「 $\tan \theta$ とは何ですか。言葉で説明しなさい」という問の正答率は77.8%であった。

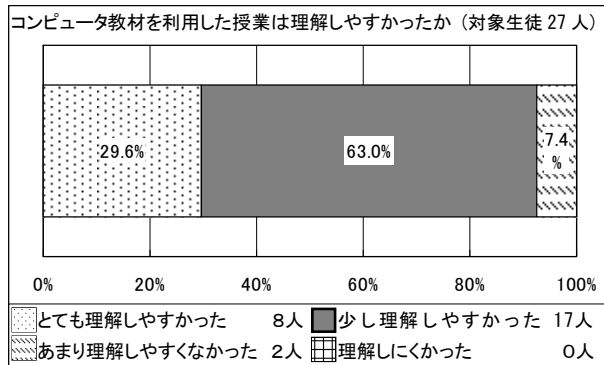
過去9年間の所属校での指導経験から、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ いずれの意味の理解にも効果的であったと判断できる。



第12図 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の定義を確認する小テストの結果

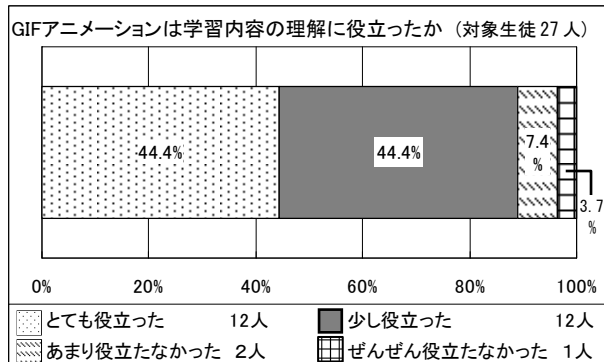
(2) コンピュータ教材

第13図は、コンピュータ教材を利用した授業の理解しやすさについてのアンケート結果である。肯定的な評価の「とても理解しやすかった」と「少し理解しやすかった」の合計が92.6%になり、コンピュータ教材を利用した授業が理解しやすかったことが分かった。



第13図 コンピュータ教材を利用した授業の理解しやすさ

また、第14図は、のGIFアニメーションの学習効果についてのアンケート結果である。肯定的な評価の「とても役立った」と「少し役立った」の合計が88.8%となり、GIFアニメーションが学習内容の理解に役立ったことが分かった。



第14図 GIFアニメーションの学習効果

(3) アンケートの自由記述

アンケートの自由記述には、「パソコン教材による授業は楽しくよく分かった」「アニメーション等の工夫により、黒板では表せない部分が表せるという点がとてもいいと思った」「アニメーションだとどんな動きをするのかが分かるので理解しやすかった」「分からないときのための復習ページがあって分かりやすかった」という肯定的な意見がほとんどであった。

しかし、少数意見として、「見て考えている間にアニメーションが動いてしまった」「アニメーションがもう少しゆっくり動けば、考える時間が増えると思った」という記述もあり、アニメーションの動く速さに課題があることも分かった。

研究のまとめ

生徒が鈍角への拡張による違和感を持たずに $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の意味の理解を深めるためには、単位円による定義を用いて導入する取組と変化の様子を視覚的にとらえさせる取組を行うことが効果的であろう、という考えに基づき、コンピュータ教材を開発し、授業実践を通して検証を試みた。検証内容、小テスト及びアンケートの結果から、効果的であったことを示せた。

生徒一人が一台のコンピュータを使用し、コンピュータ教材が提示する順に従って学習を進め、動的操作を行うことで、授業に主体的に取り組み、学ぶことの楽しさや充実感を味わいながら学習内容を理解できることが分かった。

本研究では三角比の導入の部分を取り上げたが、コンピュータを利用した指導は、他の分野でも十分に効果が期待できる。今後は、他の分野でもコンピュータ教材の開発を進め、指導法のさらなる改善を図り、生徒が主体的に学習に取り組む意欲を高めたい。

おわりに

開発したコンピュータ教材は、一斉授業だけでなく、長期休業中等の講習や個別指導にも利用できる。また、コンピュータ教材をCD-ROM等に保存し、生徒に貸し出すことにより、生徒の自学自習に役立たせることも可能である。アンケートの自由記述で指摘されたアニメーションの動きの速さを改善し、一斉授業以外でも、このコンピュータ教材を活用したい。

引用文献

- 国立教育政策研究所 2007 「平成17年度高等学校教育課程実施状況調査 教科・科目別分析及改善点(数学・数学I)」(http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h17_h/h17_h/05001031040004000.pdf (2007.4.16取得)) p.1、p.5、p.14
- 神奈川県教育委員会 2007 「平成18年度神奈川県立高等学校学習状況調査報告書」 p.55

参考文献

- 沖縄県立教育センター 2001 『研修報告収録 第29集』 pp.131-210
- 神奈川県立総合教育センター 2007 『「ITを活用した授業づくり」ハンドブック(改訂第二版)』
- 京都府総合教育センター 1998 『コンピュータを活用した学習指導の在り方 高等学校(第2集)』
- 実教出版 1978 文部省検定済教科書「新編数学I」(昭和54年度用)